МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Институт технологий (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Донской государственный технический университет» в г. Волгодонске Ростовской области
(ИТ (филиал) ДГТУ в г. Волгодонске)

УТВЕРЖДАЮ
И.о. директора
_______________А.В.Поздеев
«28» апреля 2025 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
(ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА)
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
по дисциплине
«Высшая математика»
для обучающихся по направлению подготовки
37.03.01 Психология
направленность Психология образования

Волгодонск
2025

Лист согласования

Оценочные материалы (оценочные средства) по дисциплине
________________«Высшая математика»___________________
составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 37.03.01 Психология направленность Психология образования
Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры «Технический сервис и информационные технологии» протокол № 9___ от «28» _______04_______ 2025 г.

Разработчики оценочных материалов (оценочных средств)

Доцент ___________________ О.А. Захарова
подпись

«_28_» ________04________ 2025 г.

Заведующий кафедрой ____________________ Н.В. Кочковая
подпись

«_28_» ________04________ 2025г.

Согласовано:

Директор ГБУ СОН РО «СРЦ г. Волгодонска» ___________________ Г.В. Голикова
подпись

«_28_» _______04________ 2025г.

Директор МБУ ЦПП МСП «Гармония»г.Волгодонска ________________________ Г.Н. Мельничук
подпись

«28»_____04________2025 г.

Лист визирования оценочных материалов (оценочных средств)
на очередной учебный год

Оценочные материалы (оценочные средства) по дисциплине «Высшая математика» проанализированы и признаны актуальными для использования на 20__- 20__ учебный год.
Протокол заседания кафедры «ТС и ИТ» от «__» _______ 20__ г. № ______________
Заведующий кафедрой «ТС и ИТ» ___________________Кочковая Н.В.
«____» _________20__ г.

Оценочные материалы (оценочные средства) по «Высшая математика» проанализированы и признаны актуальными для использования на 20__- 20__ учебный год.
Протокол заседания кафедры «ТС и ИТ» от «__» _______ 20__ г. № ______________
Заведующий кафедрой «ТС и ИТ» ___________________Кочковая Н.В.
«____» _________20__ г.

Оценочные материалы (оценочные средства) по дисциплине «Высшая математика» проанализированы и признаны актуальными для использования на 20__- 20__ учебный год.
Протокол заседания кафедры «ТС и ИТ» от «__» _______ 20__ г. № ______________
Заведующий кафедрой «ТС и ИТ» ___________________Кочковая Н.В.
«____» _________20__ г.

Оценочные материалы (оценочные средства) по дисциплине «Высшая математика» проанализированы и признаны актуальными для использования на 20__- 20__ учебный год.
Протокол заседания кафедры «ТС и ИТ» от «__» _______ 20__ г. № ______________
Заведующий кафедрой «ТС и ИТ» ___________________Кочковая Н.В.
«____» _________20__ г.

Содержание

1 . Паспорт оценочных материалов (оценочных средств)

Оценочные материалы (оценочные средства) прилагаются к рабочей программе дисциплины и представляет собой совокупность контрольно-измерительных материалов (типовые задачи (задания), контрольные работы, тесты и др.) и методов их использования, предназначенных для измерения уровня достижения обучающимся установленных результатов обучения.

Оценочные материалы (оценочные средства) используются при проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся.

1.1 Перечень компетенций, формируемых дисциплиной, с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОПОП

Перечень компетенций, формируемых в процессе изучения дисциплины:

УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

Конечными результатами освоения дисциплины являются сформированные когнитивные дескрипторы «знать», «уметь», «владеть», расписанные по отдельным компетенциям. Формирование дескрипторов происходит в течение всего семестра по этапам в рамках контактной работы, включающей различные виды занятий и самостоятельной работы, с применением различных форм и методов обучения (табл. 1).

Таблица 1 Формирование компетенций в процессе изучения дисциплины

Код компетенции	Уровень освоения	Дескрипторы компетенции (результаты обучения, показатели достижения результата обучения, которые обучающийся может продемонстрировать)	Вид учебных занятий, работы[1], формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции[2]	Контролируемые разделы и темы дисциплины[3]	Оценочные материалы (оценочные средства), используемые для оценки уровня сформированности компетенции	Критерии оценивания компетенций[4]
УК-1	УК-1.1	Знает основные направления и методы поиска, критического анализа и синтеза информации, полученной из разных актуальных источников, применяемые в соответствии с требованиями и условиями поставленной задачи	Л., П.р., С.р	1.1.-.1.12 2.1.-2.10	Экзаменационные вопросы 1-95.	Ответы на экзаменационные вопросы 1-95. Выполнения заданий к практическим занятиям. посещаемость занятий; познавательная активность на занятиях, качество
	УК-1.2	Умеет применять в процессе решения поставленных задач методы поиска, сбора и обработки информации, полученной из разных источников, осуществляя ее критический анализ и синтез, с учетом выявленных системных связей и отношений между изучаемыми явлениями, процессами и/или объектами				
	УК-1.3	Владеет навыками поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода в процессе решения поставленных задач организации социального обслуживания и определении и применении мер социальной поддержки граждан				

[1] Лекционные занятия, практические занятия, лабораторные занятия, самостоятельная работа

[2] Необходимо указать активные и интерактивные методы обучения (например, интерактивная лекция, работа в малых группах, методы мозгового штурма, решение творческих задач, работа в группах, проектные методы обучения, ролевые игры, тренинги, анализ ситуаций и имитационных моделей и др.), способствующие развитию у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений, лидерских качеств

[3] Указать номера тем в соответствии с рабочей программой дисциплины

[4] Необходимо выбрать критерий оценивания компетенции: посещаемость занятий; подготовка к практическим занятиям; подготовка к лабораторным занятиям; ответы на вопросы преподавателя в рамках занятия; подготовка докладов, эссе, рефератов; умение отвечать на вопросы по теме практических работ, познавательная активность на занятиях, качество подготовки рефератов и презентацией по разделам дисциплины, контрольные работы, экзамены, умение делать выводы и др.

1.2 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Оценивание результатов обучения по дисциплине осуществляется в соответствии с Положением о текущем контроле и промежуточной аттестации обучающихся.

По дисциплине «Математика» предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль – не предусмотрен; промежуточная аттестация (оценивается уровень и качество подготовки по дисциплине в целом).

текущий контроль (осуществление контроля всех видов аудиторной и внеаудиторной деятельности обучающегося с целью получения первичной информации о ходе усвоения отдельных элементов содержания дисциплины); промежуточная аттестация (оценивается уровень и качество подготовки по дисциплине в целом).

Текущий контроль в семестре проводится с целью обеспечения своевременной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы обучающихся. Текущий контроль служит для оценки объёма и уровня усвоения обучающимся учебного материала одного или нескольких разделов дисциплины (модуля) в соответствии с её рабочей программой и определяется результатами текущего контроля знаний обучающихся.

Текущий контроль осуществляется два раза в семестр по календарному графику учебного процесса.

Текущий контроль предполагает начисление баллов за выполнение различных видов работ. Результаты текущего контроля подводятся по шкале балльно-рейтинговой системы. Регламент балльно-рейтинговой системы определен Положением о системе «Контроль успеваемости и рейтинг обучающихся».

Текущий контроль является результатом оценки знаний, умений, навыков и приобретенных компетенций обучающихся по всему объёму учебной дисциплины, изученному в семестре, в котором стоит форма контроля в соответствии с учебным планом.

Текущий контроль успеваемости предусматривает оценивание хода освоения дисциплины: теоретических основ и практической части.

Промежуточная аттестация по дисциплине «Математика» проводится в форме экзамена.

В табл. 2 приведено весовое распределение баллов и шкала оценивания по видам контрольных мероприятий.

Таблица 2. Весовое распределение баллов и шкала оценивания по видам контрольных мероприятий.

Текущий контроль (50 баллов[5]) – не предусмотрен						Промежуточная аттестация (50 баллов)	Итоговое количество баллов по результа-там текущего контроля и промежуточной аттестации
Блок 1			Блок 2				
Лекционные занятия (X_1)	Практические занятия (Y_1)	Лабораторные занятия (Z_1)	Лекционные занятия (X_2)	Практические занятия (Y_2)	Лабораторные занятия (Z_2)	от 0 до 50 баллов	Менее 61 балла – неудовлетворительно; 61-75 – удовлетворительно; 76-90 – хорошо; 91-100 балла – отлично
-	-	-	-	-	-		
Сумма баллов за 1 блок = $X_1 + Y_1$			Сумма баллов за 2 блок = $X_2 + Y_2$				

Для определения фактических оценок каждого показателя выставляются следующие баллы (табл.3):

Таблица 3– Распределение баллов по дисциплине

Вид учебных работ по дисциплине	***Количество баллов***	
	1 блок	***2 блок***
Текущий контроль (50 баллов)		
Посещение занятий	-	-
Выполнение заданий по дисциплине (УО), в том числе:		
- устный опрос (УО)	-	-
Промежуточная аттестация (50 баллов)		
Экзамен проводится в устной форме		

[5] Вид занятий по дисциплине (лекционные, практические, лабораторные) определяется учебным планом. Количество столбцов таблицы корректируется в зависимости от видов занятий, предусмотренных учебным планом.

Распределение баллов по блокам,по каждому виду занятий в рамках дисциплины определяет преподаватель.

Распределение баллов по дисциплине утверждается протоколом заседания кафедры.

По заочной форме обучения мероприятия текущего контроля не предусмотрены.

Экзамен является формой итоговой оценки качества освоения обучающимся образовательной программы по дисциплине в целом или по разделу дисциплины. По результатам экзамена обучающемуся выставляется оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», или «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» (91-100 баллов) выставляется обучающемуся, если:

- обучающийся набрал по текущему контролю необходимые и достаточные баллы для выставления оценки автоматом[6];
- обучающийся знает, понимает основные положения дисциплины, демонстрирует умение применять их для выполнения задания, в котором нет явно указанных способов решения;
- обучающийся анализирует элементы, устанавливает связи между ними, сводит их в единую систему, способен выдвинуть идею, спроектировать и презентовать свой проект (решение);
- ответ обучающегося по теоретическому и практическому материалу, содержащемуся в вопросах экзаменационного билета, является полным, и удовлетворяет требованиям программы дисциплины;
- обучающийся продемонстрировал свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей дисциплины;
- на дополнительные вопросы преподавателя обучающийся дал правильные ответы.

Компетенция (и) или ее часть (и) сформированы на высоком уровне (уровень 3) (см. табл. 1).

Оценка «хорошо» (76-90 баллов) выставляется обучающемуся, если:

- обучающийся знает, понимает основные положения дисциплины, демонстрирует умение применять их для выполнения задания, в котором нет явно указанных способов решения; анализирует элементы, устанавливает связи между ними;
- ответ по теоретическому материалу, содержащемуся в вопросах экзаменационного билета, является полным, или частично полным и удовлетворяет требованиям программы, но не всегда дается точное, уверенное и аргументированное изложение материала;
- на дополнительные вопросы преподавателя обучающийся дал правильные ответы;
- обучающийся продемонстрировал владение терминологией соответствующей дисциплины.

Компетенция (и) или ее часть (и) сформированы на среднем уровне (уровень 2) (см. табл. 1).

Оценка «удовлетворительно» (61-75 баллов) выставляется обучающемуся, если:

- обучающийся знает и воспроизводит основные положения дисциплины в соответствии с заданием, применяет их для выполнения типового задания в котором очевиден способ решения;
- обучающийся продемонстрировал базовые знания важнейших разделов дисциплины и содержания лекционного курса;
- у обучающегося имеются затруднения в использовании научно-понятийного аппарата в терминологии курса;
- несмотря на недостаточность знаний, обучающийся имеется стремление логически четко построить ответ, что свидетельствует о возможности последующего обучения.

Компетенция (и) или ее часть (и) сформированы на базовом уровне (уровень 1) (см. табл. 1).

Оценка «неудовлетворительно» (менее 61 балла) выставляется обучающемуся, если:

---

[6] Количество и условия получения необходимых и достаточных для получения автомата баллов определены Положением о системе «Контроль успеваемости и рейтинг обучающихся»

- обучающийся имеет представление о содержании дисциплины, но не знает основные положения (темы, раздела, закона и т.д.), к которому относится задание, не способен выполнить задание с очевидным решением, не владеет навыками находить стратегического анализа, разработки и осуществления стратегии организации;

- у обучающегося имеются существенные пробелы в знании основного материала по дисциплине;

- в процессе ответа по теоретическому материалу, содержащемуся в вопросах экзаменационного билета, допущены принципиальные ошибки при изложении материала.

Компетенция(и) или ее часть (и) не сформированы.

1.3 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Оценивание результатов обучения студентов по дисциплине «Математика» осуществляется по регламенту текущего контроля и промежуточной аттестации.

Формы промежуточного контроля знаний:

- устный опрос (УО);

Проработка конспекта лекций и учебной литературы осуществляется студентами в течение всего семестра, после изучения новой темы. Перечень вопросов для устного опроса определен содержанием темы в РПД и методическими рекомендациями по изучению дисциплины.

Защита практических заданий производится студентом в день их выполнения в соответствии с планом-графиком. Преподаватель проверяет правильность выполнения практического задания студентом, контролирует знание студентом пройденного материала с помощью контрольных вопросов или тестирования.

Оценка компетентности осуществляется следующим образом: в процессе защиты выявляется информационная компетентность в соответствии с практическим заданием, затем преподавателем дается комплексная оценка деятельности студента.

Высокую оценку получают студенты, которые при подготовке материала для самостоятельной работы сумели самостоятельно составить логический план к теме и реализовать его, собрать достаточный фактический материал, показать связь рассматриваемой темы с современными проблемами науки и общества, со специальностью студента и каков авторский вклад в систематизацию, структурирование материала.

Оценка качества подготовки на основании выполненных заданий ведется преподавателям (с обсуждением результатов), баллы начисляются в зависимости от сложности задания.

Итоговый контроль освоения умения и усвоенных знаний дисциплины «Математика» осуществляется в процессе промежуточной аттестации на экзамене. Условием допуска к экзамену является положительная текущая аттестация по всем практическим работам учебной дисциплины, ключевым теоретическим вопросам дисциплины.

2. Контрольные задания (демоверсии) для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

2.1. Типовые экзаменационные материалы

Перечень вопросов для проведения промежуточной аттестации

Вопросы для экзамена.

1.Понятие матрицы, типы матриц

2.Операции с матрицами (сложение, умножение на число, умножение матрицы на матрицу, транспортирование матриц). Свойства операций.

3.Определители матриц, их свойства.

4.Разложение определителя по элементам любой строки, столбца.

5.Обратная матрица. Критерий ее существования и формула для вычисления.

6.Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

7.Совместные, несовместные, определенные, неопределенные СЛАУ.

8.Формулы Крамера для решения СЛАУ.

9.Матричный метод решения СЛАУ.

10.Минор матрицы, ранг матрицы.

11.Элементарные преобразования матриц, эквивалентные матрицы и их ранги.

12.Линейно зависимые, линейно независимые строки матрицы. Критерий линейной зависимости.

13.Критерий совместности СЛАУ Кронекера-Капелли.

14.Метод Жордано-Гаусса решения СЛАУ. Базисный минор, базисные и свободные переменные СЛАУ.

15.Решение однородных систем линейных уравнений (ОСЛАУ).

16.Критерий существования нетривиальных решений ОСЛАУ.

17.Фундаментальная система решений ОСЛАУ, общее решение.

18.Понятие n-мерного вектора, операции с векторами.

19.Линейное арифметическое векторное пространство.

20.Линейно зависимая и независимая система векторов. Критерий линейной зависимости системы векторов.

21.Существование в Rn системы n линейно независимых векторов. Базис в Rn.

22.Линейная зависимость в Rn любой системы из m векторов (m>n).

23.Критерий базиса в Rn. Разложение вектора по базису и его единственность.

24.Скалярное произведение в Rn, его свойства. Экономический и механический смысл скалярного произведения.

25.n-мерное евклидово пространство, модуль вектора, направление косинусы вектора.

26.Проекция вектора на вектор, ортогональные, коллинеарные, компланарные векторы.

27.Вектор как направленный отрезок. Декартов прямоугольный базис и декартова прямоугольная система координат (д.п.с.к.).

28.Радиус-вектор точки, координаты точки в д.п.с.к.

29.Векторное произведение векторов в Е3, его свойства, механический смысл.

30.Смешанное произведение векторов в Е3, его свойства.

31.Условия ортогональности, коллинеарности, компланарности векторов в Е3.

32.Понятие уравнения геометрического образа.

33.Плоскость, нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости и его частные случаи.

34.Угол между плоскостями, условие перпендикулярности и параллельности плоскостей, расстояние от точки до плоскости. Плоскость в En, n>3.

35.Прямая в Е3, ее направляющий вектор. Общие, канонические, параметрические уравнения прямой. Луч и отрезок.

36.Угол между прямыми в Е3. Перпендикулярные, параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые. Расстояние от точки до прямой в Е3. Прямая, луч и отрезок в En, n>3.

37.Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Точка пересечения прямой и плоскости, принадлежность прямой плоскости.

38.Прямая на плоскости, как частный случай прямой в Е3 и как линия пересечения плоскости с плоскостью ОХУ.

39.Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом.

40.Уравнение кривой второго порядка, его преобразование с помощью поворота и параллельного переноса осей координат.

41.Эллипс, гипербола, парабола. Оси симметрии, центр, вершины, эксцентриситет. Канонические уравнения и уравнения со смещенным центром.

42.Множество, операции с множествами.

43.Функция одной переменной, способы задания. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция.

44.Предел функции при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

45.Бесконечно малая функция и ее свойства.

46.Бесконечно большая функция, связь с бесконечно малой.

47.Основные теоремы о пределах функции (критерий существования предела, единственность, предел суммы, произведения, частного).

48.Первый и второй специальные пределы.

49.Сравнение бесконечно малых функций.

50.Односторонние пределы функции.

51.Непрерывность функции в точке, на интервале, отрезке. Точки разрыва и их классификация.

52.Основные теоремы о непрерывных функциях (непрерывность основных элементарных функций, сложной функции).

53.Свойства функций непрерывных на замкнутом отрезке, абсолютный экстремум функции.

54.Приращение аргумента и приращение функции. Задача о касательной к плоской кривой.

55.Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой.

56.Темп роста и эластичность функции.

57.Необходимое условие дифференцируемости функции.

58.Основные правила и формулы дифференцирования.

59.Дифференциал функции, его геометрический смысл, свойства, применение к приближенным вычислениям.

60.Производные и дифференциалы высших порядков.

61.Первообразная. Теорема о первообразной. НИ, его геометрический смысл.

62.Свойства НИ.

63.Теорема о замене переменной в НИ.

64.Таблица основных интегралов.

65.Интегрирование по частям в НИ.

66.Рациональные дроби, правильные и неправильные дроби. Интегрирование неправильных дробей (теорема).

67.Простейшие рациональные дроби, их интегрирование. Теорема о разложении правильной дроби на сумму простейших дробей.

68.Интегрирование тригонометрических функций.

69.Интегрирование простейших иррациональностей.

70.Тригонометрические подстановки.

71.Задача о вычислении площади криволинейной трапеции.

72.ОИ как предел интегральных сумм. Геометрический смысл ОИ. Теорема существования ОИ.

73.Свойства ОИ, теорема о среднем.

74.Теорема о производной от интеграла с переменным верхним пределом.

75.Формула Ньютона-Лейбница (теорема).

76.Замена переменной и интегрирование по частям в ОИ.

77.Теоремы о площади плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными а) в декартовой системе координат; б) параметрически.

78.Длина дуги плоской кривой. Теорема о длине дуги в декартовой системе координат и ее следствия.

79.Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений (теорема). Объем тела вращения.

80.Экономические приложения ОИ.

81.Несобственные интегралы 1-го рода и 2-го, их определение, вычисление и геометрический смысл.

82.Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия

83.ДУ с разделяющимися переменными

84.Однородные ДУ.

85.Линейные дифференциальные уравнения.

86.Дифференциальные уравнения второго порядка. Основные понятия

87.Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

88.Числовые ряды. Частичная сумма. Сумма ряда

89.Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд

90.Достаточные признаки сходимости. Признак сравнения

91.Признак Даламбера

92.Радикальный признак Коши

93.Интегральный признак Коши

94.Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

95.Функциональные ряды. Сходимость функциональных рядов.

Практические задания
по дисциплине «Высшая математика»

Линейная алгебра

1. Даны матрицы A, B, C, числа α и β.
Вычислить: а) C·B; б) α ·A + β·B.

1.1. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&4\\1&1&1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}$; α =2; β=3;

1.2. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&4\\1&1&1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$; α =3; β=3;

1.3. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&0&4\\4&1&1\\1&3&5\end{pmatrix}$: $C=\begin{pmatrix}3&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}$; α =4; β=2;

2. Решить системы линейных уравнений:
а) по формулам Крамера, матричным методом, методом Гаусса;
б) методом Гаусса;
в) методом Гаусса.

2.1. а) $\begin{cases} 2x-5y+4z=15, \\ x+2y-z=-3, \\ 3x+4y+z=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-z=-3, \\ 2x-5y+4z=15, \\ 3x-3y+3z=12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-5y+4z=15, \\ x+2y-z=-3, \\ 3x-3y+3z=2. \end{cases}$

2.2. а) $\begin{cases} x+7y+2z=5, \\ 3x-8y-z=1, \\ 4x+2y+z=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+7y+2z=5, \\ 5x+9y+3z=11, \\ 4x+2y+z=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+7y+2z=5, \\ 5x+9y+3z=6, \\ 4x+2y+z=6. \end{cases}$

2.3. а) $\begin{cases} 2x+5y+z=8, \\ 3x-y+2z=3, \\ x+y-2z=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+5y+z=8, \\ 7x+16y+z=29, \\ x+y-2z=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+5y+z=8, \\ 7x+16y+z=2, \\ x+y-2z=5. \end{cases}$

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$.

Найти: а) угол между векторами $\varphi=(\overline{AB},\overline{CD})$ **;**

б) проекцию вектора $\overline{AB}$ **на вектор** $\overline{AC}$ **;**

в) площадь треугольника ABC **;**

г) высоту треугольника ABC**, опущенную из вершины** C **на сторону** AB**;**

д) объем пирамиды $ABCD$**;**

е) высоту пирамиды $ABCD$**, опущенную из вершины** D **на основание** ABC **.**

1.1. $A(4;-1;3)$, $B(-2;1;0)$, $C(0;-5;1)$, $D(4;-1;2)$;

1.2. $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;1;-2)$, $D(3;4;3)$;

1.3. $A(-3;4;-7)$, $B(1;5;-4)$, $C(-2;7;3)$, $D(-4;8;-12)$;

1.4. $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$, $D(5;9;-8)$;

1.5. $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(7;5;-3)$;

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку А и перпендикулярно вектор

2.1. A (2,5,-3), B (7,8,-1), C(9,7,4).
2.2. A (7,-5,0), B (8,3,-1), C(8,5,1).
2.3. A (5,3,-1), B (0,0,-3), C(5,-1,0).

3. Даны четыре точки A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3), D(x_4,y_4,z_4).

Найти: а) уравнение плоскости, проходящей через точки А, В, С;
б) расстояние от точки Д до плоскости АВС;
в) угол между плоскостью АВС и плоскостью 5x-3y+7z-3=0.

3.1. А (1,-1,2), В (2,1,2), С (1,1,4), Д (0,-3,1).
3.2. А (-3,-1,3), В (2,1,-4), С (0,-3,-1), Д (-1,2,-2).
3.3. А (1,3,0), В (4,-1,2), С (3,0,1), Д (-4,3,0).

4. Прямая L_1 задана общими уравнениями.
Найти: а) канонические и параметрические уравнения прямой L_1;
б) найти угол между прямой L_1 и прямой L_2: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{-1}$ **.**

4.1. L_1: $\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$

4.2. L_1: $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$

4.3. L_1: $\begin{cases} x-3y+2z+2=0, \\ x+3y+z+14=0. \end{cases}$

4.4. L_1: $\begin{cases} 4x+y-3z+2=0, \\ 2x-y+z-8=0. \end{cases}$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

5.1. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$, $x+2\cdot y+3\cdot z-14=0$.

5.2. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$, $x+2\cdot y-5\cdot z+20=0$.

5.3. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$, $x-3\cdot y+7\cdot z-24=0$.

6. Даны точки А,В,С.
Найти: а) угол между векторами $\vec{AB}$ **и** $\vec{AC}$ **;**
б) проекцию вектора $\vec{AB}$ **на вектор** $\vec{AC}$ **;**
в) угол между медианой АД и высотой АЕ;
г) уравнение прямой, проходящей через точку С, параллельно прямой АВ;
д) точку пересечения высот треугольника.

6.1. А(2,3), В(4,5), С(3,-2).

6.2. А(2,5), В(-4,5), С(0,1).

6.3. А(1,3), В(-2,3), С(3,4).

6.16. А(2,4), В(1,5), С(3,-5).

6.17.А(3,4), В(6,2), С(-1,10).

6.18. А(2,1), В(4,6), С(-2,-2).

Пределы. Непрерывность функции

1. **Вычислить пределы числовых**

последовательностей:

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}}{3\sqrt[3]{n}+n}$

   б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n-5}$

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2}{7n^2-2n+3}$

   б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+7}{5n+3}\right)^{n}$

3. *а)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n^3-3n+2}$

   б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-3}\right)^{3n}$

1. Вычислить предел функции:

2.1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ при: а) $x_0=2$; б) $x_0=3$; в) $x_0=\infty$

2.2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$ при: а) $x_0=0$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$

2.3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ при: а) $x_0=3$; б) $x_0=-3$; в) $x_0=\infty$

1. **Вычислить предел функции:**

3.1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$

3.2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{10-2x}}{x-3}$

3.3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}$

3.4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$

1. **Вычислить предел функции:**

4.1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$

4.2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg6x}{x^2-2x}$

4.3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

4.4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{\sin 7x}$

1. **Исследовать функцию *y=f(x)* на непрерывность; найти точки разрыва. Построить график функции:**

7.1.

$$y=\begin{cases}0, & x<-2\\ x^2+1, & -2\le x\le 2\\ x+3, & x>2\end{cases}$$

7.2. $$y=\begin{cases}1, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & x>1\end{cases}$$

7.3.

$$y=\begin{cases}-1, & x<0\\ \sqrt{x}, & 0\le x\le 4\\ x-2, & x>4\end{cases}$$

7.4.

$$y=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\le x\le \pi/2\\ x+1, & x>\pi/2\end{cases}$$

Производные. Приложение производной

1.Найти производную:

1.1. а) $y=5e^x+ctgx-2$; б) $y=\sin 2x-\sqrt{x^4+3x^2}$

1.2. а) $y=3\ln x-tgx+1$; б) $y=\arcsin 6x+\cos^9 x$

1.3. а) $y=3^x+ctgx-4$; б) $y=\sqrt{\arcsin x}+e^{\cos x}$

2.Найти производную:

2.1. а) $y=\ln x\cdot\arcsin x$; б) $y=arctg^4 x\cdot\cos(e^x)$

2.2. а) $y=7^x\cdot ctgx$; б) $y=\sin 2x\cdot\sqrt{x^6+2x}$

2.3. а) $y=\ln x\cdot\sin x$; б) $y=tg^4 x\cdot\ln(\arccos x)$

Найти производную:

3.1. а) $y=\dfrac{tgx}{2^x}$; б) $y=\dfrac{e^{\sin x}}{x^3-2\ln x}$

3.2. а) $y=\dfrac{\sqrt[5]{x}}{e^x}$; б) $y=\dfrac{x^4+1}{\ln 9x}$

3.3. а) $y=\dfrac{arctgx}{x^2+x}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{\sin x}}{ctg 4x}$

. Вычислить пределы функций, используя правило Лопиталя:

2.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+5x^3}{5x^4-2x+10}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$

2.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+7x+3x^4}{x^3-5x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{\sin\pi x}$

2.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8+3x+2x^4}{x^4-10x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 7x}$

Исследовать функцию на экстремум и перегиб, и построить схематический график:

3.1. $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$;

3.2. $y=2x^3-3x^2+4$;

3.3. $y=2x^3-6x^2-18x+3$;

Провести полное исследование функции и построить её график:

4.1. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$;

4.2. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$;

4.3. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$;

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛ

1**. Вычислить неопределенный интеграл.**

1.1.а) $\int\left(5x^4-\dfrac{3}{x^7}+2\sqrt[9]{x}+\sin x\right)dx$ б) $\int\dfrac{(3x+2)^2}{x^4}dx$

1.2. а) $\int\left(2x^6+\dfrac{7}{x^9}-3\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx$ б) $\int\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$

1.3. а) $\int\left(3x^7-\dfrac{2}{x^6}+5\sqrt[3]{x}+\cos x\right)dx$ б) $\int\dfrac{(2x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

2**. Вычислить неопределенный интеграл**

2.1. а) $\int\sqrt{5-2x^3}\cdot x^2dx$	б) $\int e^{2\cos x+1}\cdot\sin x dx$
2. 2. а) $\int\dfrac{x^2}{7x^3-3}dx$	б) $\int\dfrac{tg^5x+3}{\cos^2 x}dx$
2.3. а) $\int\left(2x^4+3\right)^{10}\cdot x^3dx$	б) $\int\dfrac{1+\ln^3 x}{x}dx$

3. Вычислить неопределенный интеграл.

3.1. а) $\int(2x-1)\cos 3x dx$ б) $\int\ln x dx$

3.2. а) $\int(5-x)\cdot e^{2x}dx$ б) $\int\arcsin x dx$

3.3. а) $\int(3-x)\sin 3x dx$ б) $\int x^2\ln x dx$

4. Вычислить неопределенный интеграл

4.1. а) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+29}dx$ б) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2-2x}}dx$

4.2. а) $\int \frac{3x+2}{x^2-2x+3}dx$ б) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x}}dx$

4.3. а) $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+3}dx$ б) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-8x}}dx$

5. Вычислить неопределенный интеграл.

5.1. а) $\int \frac{x^2+1}{x(x+1)(x-2)}dx$ б) $\int \frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$

5.2. а) $\int \frac{2x-1}{x(x-1)(x+2)}dx$ б) $\int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+9)}dx$

5.3. а) $\int \frac{x^2+2}{x(x-3)(x-1)}dx$ б) $\int \frac{x^2-x+2}{(x-2)^2(x^2+1)}dx$

6. Вычислить неопределенный интеграл

6.1. $\int \sin^3 x\,dx$

6.2. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$

6.3. $\int \frac{\cos x}{2+\cos x}dx$

6.4. $\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$

6.5. $\int \sin^4 x\,dx$

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями. Сделать чертеж.

8.1. а) $y = x^2 - 2x,$ $y = x.$ б) $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$

8.2. а) $y = x^2 + 3x,$ $y = 2x.$ б) $r = 4\cos 3\varphi$

8.3. а) $y = x^2 - 6x,$ $y = -4x.$

б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

Вычислить объем тела вращения. Сделать чертеж.

9.1. $\begin{cases} x + y = 1, \\ x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси ox

9.8. $\begin{cases} x = y^2, \\ x = 0, \\ y = 1 \end{cases}$ вокруг оси oy

9.2. $\begin{cases} x + y = 1, \\ x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси oy

9.9. $\begin{cases} y = x^2, \\ x = 2, \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси ox

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x, y$

1.1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.

1.2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

1.3. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

2.1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.

2.2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

2.3. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

2.4. $y' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

3.1. $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$

3.2. $y' - y\,ctg\,x = 2x\sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

3.3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0.$

Задача 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

6.1. а) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2,$ б) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x},$

в) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x).$

6.2. а) $y''' - y' = x^2 + x,$ б) $y''' - 3y'' + 2y' = (1-2x)e^x,$

в) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x.$

6.3. а) $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2,$ б) $y''' - y'' - y' + y = (3x+7)e^{2x},$

в) $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x).$

1.1 ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задание 1. Найти решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными: а) по формулам Крамера; б) методом обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение:

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix},$$

где A – матрица системы, составленная из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2 и x_3; X – столбец неизвестных; B - столбец свободных членов.

а) **Метод Крамера**

Вычислим определитель матрицы A разложением по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-5)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot((-1)\cdot 1 - 2\cdot 3) + 5\cdot(2\cdot 1 - 2\cdot(-1)) + 1\cdot(2\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)) = -21 + 20 + 5 = 4.$$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то решение системы может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta;\ x_2 = \Delta_2/\Delta;\ x_3 = \Delta_3/\Delta,$$

где Δ_1, Δ_2, Δ_3 – определители третьего порядка, получаемые из определителя системы Δ заменой 1, 2 и 3-го столбца соответственно столбцом свободных членов B.

Найдем Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 8;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 2 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 12.$$

Подставим полученные значения в формулы Крамера и получим искомое решение системы:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 4/4 = 1;\ x_2 = \Delta_2/\Delta = 8/4 = 2;\ x_3 = \Delta_3/\Delta = 12/4 = 3.$$

Таким образом, получено решение системы: $\boldsymbol{x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3.}$

б) **Метод обратной матрицы**

Запишем систему в матричной форме: $AX=B$.

Определитель матрицы A системы уравнений отличен от нуля ($\Delta\neq 0$), следовательно матрица A имеет обратную A^{-1} и решение системы имеет вид:

$$X=A^{-1}B,$$

где: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot\tilde{A}$,

$\tilde{A}$ - присоединенная матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A', транспонированной к A.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называют минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, получающийся из определителя матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}).

Таким образом, **в *i*-й строке и *j*-м столбце** обратной матрицы располагается алгебраическое дополнение элемента, стоящего **в *j*-й строке и в *i*-м** столбце исходной матрицы, деленное на определитель исходной матрицы.

1) Транспонируем матрицу A (запишем строки исходной матрицы A в столбцы транспонированной матрицы A'):

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Вычислим алгебраические дополнения $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ к элементам транспонированной матрицы A':

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \qquad \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8; \qquad \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9;$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4; \qquad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5; \quad \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -4; \quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

3) Запишем присоединенную матрицу $\tilde{A}$ и найдем обратную A^{-1}:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -9 \\ -4 & 4 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -9 \\ -4 & 4 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 & 2 & -9/4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5/4 & -1 & 7/4 \end{pmatrix}.$$

4) Проверим правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}:

$$A^{-1}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -9 \\ -4 & 4 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7\cdot 3+8\cdot 2+(-9)\cdot(-1) & -7\cdot(-5)+8\cdot(-1)+(-9)\cdot 3 & -7\cdot 1+8\cdot 2+(-9)\cdot 1 \\ -4\cdot 3+4\cdot 2+(-4)\cdot(-1) & -4\cdot(-5)+4\cdot(-1)+(-4)\cdot 3 & -4\cdot 1+4\cdot 2+(-4)\cdot 1 \\ 5\cdot 3+(-4)\cdot 2+7\cdot(-1) & 5\cdot(-5)+(-4)\cdot(-1)+7\cdot 3 & 5\cdot 1+(-4)\cdot 2+7\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

где E – единичная матрица.

5) Найдем решение системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -9 \\ -4 & 4 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7\cdot(-4)+8\cdot 6+(-9)\cdot 8 \\ -4\cdot(-4)+4\cdot 6+(-4)\cdot 8 \\ 5\cdot(-4)+(-4)\cdot 6+7\cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получено решение системы: $\boldsymbol{x_1=1; x_2=2; x_3=3.}$

в) **Метод Гаусса**

Запишем расширенную матрицу A_1 системы, полученную путем присоединения к исходной матрице A системы столбца свободных членов B:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований (перестановки строк; умножения строки на ненулевое число; прибавления к одной строке другой умноженной на число) расширенную матрицу A_1 системы сведем к равносильной матрице ступенчатого вида.

Прямой ход метода Гаусса:

1) Поменяем местами первую и третью строки в матрице A_1, чтобы в первой строке и первом столбце оказался элемент (–1):

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

2) Умножим первую строку на 2 и прибавим ко второй строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

3) Умножим первую строку на 3 и прибавим к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \end{array}\right).$$

4) Разделим третью строку на 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

5) Поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \end{array}\right).$$

6) Умножим вторую строку на (–5) и прибавим к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Обратный ход метода Гаусса:

В результате преобразований получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = \ \ 8 \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = \ \ 5, \\ \qquad\qquad\ \ -x_3 = -3 \end{cases}$$

откуда находим из третьего уравнения x_3=3;

из второго уравнения x_2=5−x_3=5−3=2;

из первого уравнения x_1= −8+3x_2+x_3= −8+6+3=1.

Таким образом, получено решение системы: $\boldsymbol{x_1=1; x_2=2; x_3=3.}$

Задание 2. По координатам вершин треугольника *A*(1; 1), *B*(-5; 4), *C*(-2; 5) найти:

а) длину стороны *AB*;

б) внутренний угол ∠*A* между сторонами *AB* и *AC*;

в) уравнение высоты, проведенной через вершину *C*;

г) точку пересечения высот треугольника *ABC*;

д) длину высоты, опущенной из вершины *C*;

е) систему линейных неравенств, определяющих треугольник *ABC*.

Сделать чертеж.

Решение: Сделаем чертеж (рис.1): по точкам *A*(1; 1), *B*(-5; 4), *C*(-2; 5) построим треугольник *ABC*; через вершины *A*, *B* и *C* проведем высоты *AK*, *BN* и *CH*; точку пересечения высот обозначим через *P*.

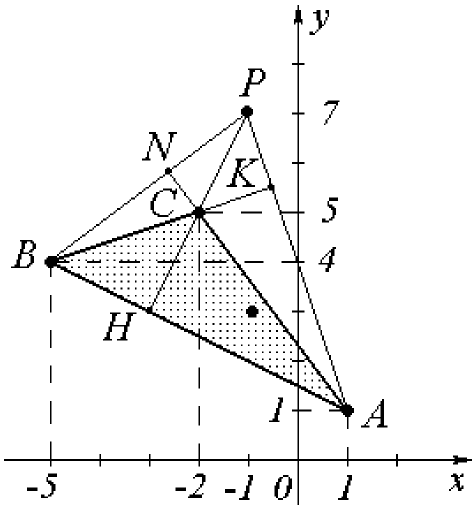

Рисунок 1

а) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

Чтобы определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, необходимо из координат конечной точки *B*($x_2;y_2$) вычесть одноименные координаты начальной точки *A*($x_1;y_1$):

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}.$$

Получим

$$\overrightarrow{AB} = \{-5-1; 4-1\} = \{-6; 3\}.$$

Длина любого вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$ находится по формуле

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Тогда длину стороны *AB* находим как длину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}.$$

б) Внутренний угол $\angle A$ между сторонами AB и AC найдем как угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, где $\overrightarrow{AC} = \{-2-1;\ 5-1\} = \{-3;\ 4\}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$

Косинус угла φ между векторами $\vec{a} = \{x_a\,; y_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b\,; y_b\}$ определяется по формуле:

$$cos\,\varphi = \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2}\sqrt{x_b{}^2 + y_b{}^2}}.$$

Найдем косинус угла $\angle A$ между сторонами AB и AC:

$$cos\angle A = \frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-6)\cdot(-3) + 3\cdot 4}{3\sqrt{5}\cdot 5} = \frac{30}{15\sqrt{5}} \cong 0.89.$$

в) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Составим это уравнение для прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-1}{-5-1} = \frac{y-1}{4-1},$$

т.е.

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y-1}{3}.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$3(x-1) = -6(y-1),$$

или

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Получили уравнение прямой AB с угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$.

Высота CH треугольника ABC, перпендикулярна прямой, проходящей через точки A и B. Если прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Тогда угловой коэффициент высоты CH равен $k_2 = -\frac{1}{k_1} = 2$,

а уравнение высоты имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $(x_0; y_0)$ - координаты точки *C*; *k* - угловой коэффициент высоты. В нашем случае *C*(-2; 5), *k*=2.

Получим

$$y - 5 = 2(x + 2).$$

Искомое уравнение высоты CH имеет вид

$$y = 2x + 9. \qquad (1)$$

г) Чтобы найти координаты точки *P* пересечения высот треугольника *ABC*, найдем уравнение высоты треугольника ABC, проведенной из вершины *B* и решим систему уравнений двух высот.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки *A* и *C*:

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-1}{5-1}.$$

Преобразуя, получим

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}; \quad k = -\frac{4}{3}.$$

Высота BN треугольника ABC, проведенная из вершины *B*(-5;4) перпендикулярна прямой, проходящей через точки *A* и *C*, ее угловой коэффициент равен $k = \frac{3}{4}$. Уравнение высоты BN треугольника ABC имеет вид

$$y - 4 = \frac{3}{4}(x + 5),$$

или

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{31}{4}. \qquad (2)$$

Координаты точки *P* пересечения высот треугольника *ABC* найдем, решив систему уравнений (1) и (2)

$$\begin{cases} y = 2x + 9 \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{31}{4} \cdot \end{cases}$$

Координаты точки *P*: $x = -1$; $y = 7$.

д) Длина высоты CH, равна расстоянию от точки *C* до прямой, проходящей через точки *A* и *B* и находится по формуле:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

где $(x_0\,;y_0)$ - координаты точки *C*;

$ax+by+c=0$ – общее уравнение прямой.

Общее уравнение прямой, проходящей через точки А и В,

$$x+2y-3=0,$$

получено преобразованием уравнения прямой АВ $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

Тогда длина высоты равна:

$$d=\frac{|1\cdot(-2)+2\cdot5-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}.$$

е) Общие уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника *ABC*:

AB: $x+2y-3=0$;

AC: $4x+3y-7=0$; (3)

BC: $x-3y+17=0$. (получено аналогично уравнениям *AB и AC*)

Выберем произвольно точку, лежащую внутри треугольника АВС (на рис.1 заштрихованная область), например, точку с координатами (-1; 3). Подставив координаты точки в уравнения прямых (3), определим знаки неравенств, определяющих треугольник *ABC*:

$$-1+2\cdot3-3=1\geq0;$$
$$4\cdot(-1)+3\cdot3-7=-2\leq0;$$
$$-1-3\cdot3+17=7\geq0.$$

Получим следующую систему линейных неравенств, определяющих треугольник

$$\begin{cases}x+2y-3\geq0;\\4x+3y-7\leq0;\\x-3y+17\geq0.\end{cases}$$

1.2 ПРЕДЕЛЫ

Задание 3. Найти предел функции.

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}$ при: а) $x_0=4$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}=\dfrac{3\cdot 4^2+2\cdot 4-1}{-2\cdot 4^2-5\cdot 4-3}=\dfrac{55}{-55}=-1;$

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}=\dfrac{3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-1}{-2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Подстановка предельного значения $x=-1$ привела к неопределенности [0/0]. Для раскрытия неопределенности разложим многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, на множители и сократим дробь:

$$3x^2+2x-1=0,\ x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}=\frac{-2\pm 4}{6},\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=-1;$$

$$-2x^2-5x-3=0,\ x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)}}{2\cdot(-2)}=\frac{5\pm 1}{-4},\ x_1=-1,\ x_2=-\frac{3}{2};$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{3(x-1/3)(x+1)}{-2(x+1)(x+3/2)}=\lim_{x\to -1}\frac{3(x-1/3)}{-2(x+3/2)}=$$

$$=\frac{3(-1-1/3)}{-2(-1+3/2)}=4.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$

Для раскрытия неопределенности [∞/∞], разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{-2x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{-2-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}=$$

$$=\frac{3+0+0}{-2+0+0}=-\frac{3}{2}.$$

1.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задание 4. Найти производные заданных функций:

а) $y=-2\sqrt[5]{x}+7\sin x$; б) $y=e^x\cdot arctg\, x$; в) $y=\dfrac{x^3}{ctg\, x}$; г) $y=ln\left(3x^4-4\right).$

Решение:

а) $y'=\left(-2\sqrt[5]{x}+7\sin x\right)'=\left(-2\sqrt[5]{x}\right)'+\left(7\sin x\right)'=-2\cdot\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}+7\cos x=$

$$=-\frac{2}{5}x^{-\frac{4}{5}}+7\cos x=-\frac{2}{5\sqrt[5]{x^4}}+7\cos x;$$

б) $y'=\left(e^x\cdot arctg\,x\right)'=\left(e^x\right)'arctg\,x+e^x\left(arctg\,x\right)'=e^x arctg\,x+e^x\frac{1}{1+x^2}$;

в) $y'=\left(\frac{x^3}{ctg\,x}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'ctg\,x-x^3\left(ctg\,x\right)'}{\left(ctg\,x\right)^2}=\frac{3x^2ctg\,x-x^3\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)}{ctg^2x}=$

$$=\frac{3x^2\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{x^3}{\sin^2x}}{ctg^2x}=\frac{3x^2\cos x\cdot\sin x+x^3}{\sin^2x\cdot ctg^2x}=3x^2tgx+\frac{x^3}{\cos^2x};$$

г) $y'=\left(ln\left(3x^4-4\right)\right)'=\frac{1}{3x^4-4}\cdot\left(3x^4-4\right)'=\frac{12x^3}{3x^4-4}$.

Задание 5. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y=\frac{x^2}{2(x-1)}$ и построить ее график.

Решение:

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $x\neq 1$.
2) Функция не является четной и не является нечетной.
3) Вертикальные асимптоты.

Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2}{2(x-1)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^2}{2(x-1)}=+\infty$,

то прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

4) Наклонные асимптоты.

Уравнение наклонной асимптоты, если она существует, запишем в виде $y=kx+b$. Найдем коэффициенты k и $в$ по формулам:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\frac{1}{2};\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, прямая $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ – наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

5) Экстремумы и интервалы монотонности.

$y'=\dfrac{2x(x-1)-x^2}{2(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{2(x-1)^2}$. $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ или $x=2$. y' не существует в точке $x=1$, но эта точка не входит в область определения функции. Следовательно, имеются две критические точки $x=0$ и $x=2$.

Разобьем этими точками область определения на интервалы знакопостоянства производной: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$. Определим знаки производной в этих интервалах: $y'(-1)>0$ и $y'(3)>0$ $\Rightarrow$ в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$ производная положительна, $y'(0{,}1)<0$ и $y'(1{,}1)<0$ $\Rightarrow$ в интервалах $(0, 1)$ и $(1, 2)$ производная отрицательна (Рис. 2*а*). Следовательно: функция возрастает в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$, убывает в $(0, 1)$ и $(1, 2)$, $x=0$ – точка максимума, $x=2$ – точка минимума. Значение максимума $y_{\max}=y(0)=0$, значение минимума $y_{\min}=y(2)=2$.

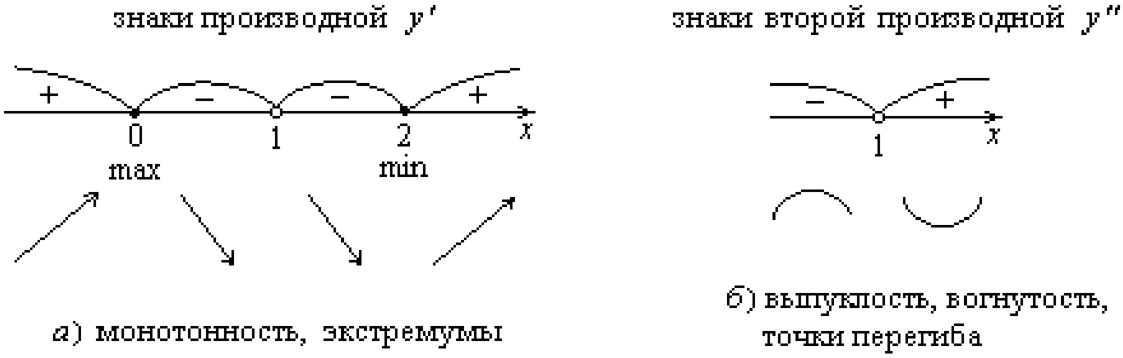

Рисунок 2

6) Интервалы выпуклости и точки перегиба.

Найдем вторую производную функции, приравняем ее к нулю и определим критическую точку:

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{2(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2-2x)}{2(x-1)^4}=\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Нанесем критическую точку на числовую ось (рис.2*б*) и определим знак второй производной на интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$. Вторая производная не обращается в 0, а в точке x=1, где она не существует, функция не определена, поэтому график функции не имеет точки перегиба. Получим $y''(x)<0$ при $x<1$; $y''(x)>0$ при $x>1$ (Рис. 2*б*).

Следовательно, в интервале $(-\infty, 1)$ функция y(x) выпукла вверх, а в интервале $(1, +\infty)$ функция y(x) выпукла вниз.

7) Найдем точки пересечения с осями координат.

Так как $\frac{x^2}{2(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, то график пересекает оси системы координат только в ее начале.

8) Построим график функции (Рис. 3).

На рисунке асимптоты $x = 1$ и $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ начерчены пунктирной линией.

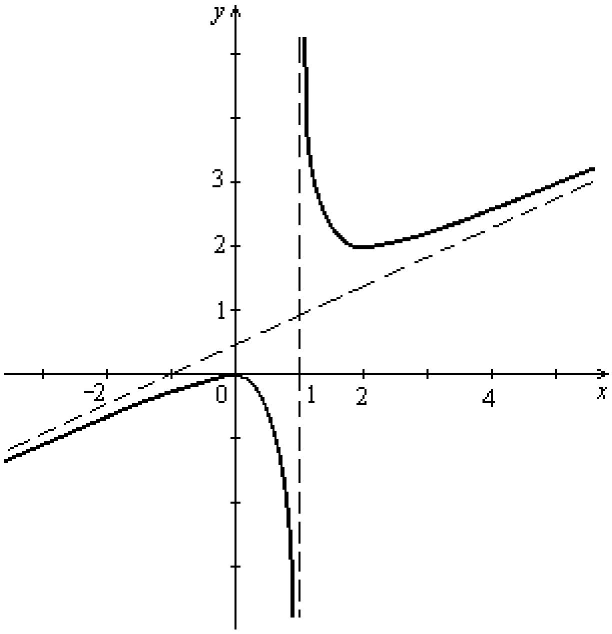

Рисунок 3

Задание 6. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = 4x^3 - 8x^2 - 11x + 15$ и построить ее график. и построить ее график.

Решение:

1) Область определения функции есть множество всех действительных чисел, т.е. $(-\infty; +\infty)$.

2) Функция не является четной и не является нечетной, т.к.

$$y(-x) = -4x^3 - 8x^2 + 11x + 15,\ y(-x) \neq y(x) \text{ и } y(-x) \neq -y(x) \text{ при } \forall x \neq 0.$$

3) Вертикальных асимптот нет, т.к. функция определена при всех действительных значениях x.

4) Наклонные асимптоты.

Уравнение наклонной асимптоты, если она существует, будем искать в виде $y = kx + b$.

Найдем коэффициент k по формуле:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 8x^2 - 11x + 15}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - \frac{8}{x} - \frac{11}{x^2} + \frac{15}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \infty .$$

Так как предел не является конечным, то наклонных асимптот нет.

5) Экстремумы и интервалы монотонности.

Найдем производную функции, приравняем ее к нулю и определим критические точки:

$$y' = 12x^2 - 16x - 11;$$

$$12x^2 - 16x - 11 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot 12\cdot(-11)}}{2\cdot 12} = \frac{16 \pm 28}{24};\ x_1 = \frac{11}{6},\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Нанесем критические точки на числовую ось (рис.4) и определим знак производной на интервалах (-∞;−1/2), (−1/2;11/6), (11/6;+∞).

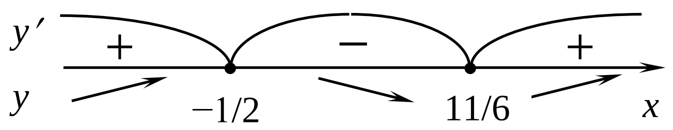

Рисунок 4

Получим: $y'(x)>0$ при $x<-1/2$ и при $x>11/6$; $y'(x)<0$ при $-1/2<x<11/6$. На интервалах (−∞;−1/2) и (11/6;+∞) функция $y(x)$ возрастает; на интервале (−1/2;11/6) функция $y(x)$ убывает. Согласно достаточному условию экстремума $x= -1/2$ – точка максимума данной функции, y_{max}=y(−1/2)=18; x=11/6 – точка минимума данной функции, y_{min}=y(11/6)$\cong$ −7,407.

6) Интервалы выпуклости и точки перегиба. Найдем вторую производную функции, приравняем ее к нулю и определим критическую точку:

$$y'' = 24x - 16;\ 24x - 16 = 0;\ x = \frac{2}{3}.$$

Нанесем критическую точку на числовую ось (рис.5), определим знак второй производной на интервалах (−∞;2/3), (2/3;+∞).

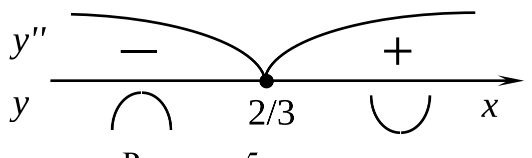

Рисунок 5

Получим $y''(x)<0$ при $x<2/3$; $y''(x)>0$ при $x>2/3$. На интервале (-∞;2/3) функция $y(x)$ выпукла вверх; на интервале (2/3;+∞) функция $y(x)$ выпукла вниз. Следовательно, x=2/3 – точка перегиба данной функции, $y_п=y(2/3)\cong 5{,}296$.

7) Найдем точки пересечения с осями координат.

а) Точка пересечения с осью ординат: $y(0)=15$, т.е. точка (0,15).

б) Точки пересечения с осью абсцисс найдем из уравнения $y(x)=0$:

$$4x^3-8x^2-11x+15=0. \qquad (1)$$

Корни кубического уравнения находятся среди чисел, на которые свободный член 15 делится без остатка. Один из корней $x_1=1$, т.к. если его подставить в (1) получим тождество: $4-8-11+15\equiv 0$.

Приравняем к нулю частное от деления многочленов и найдем оставшиеся два корня уравнения:

$$4x^2-4x-15=0;\ x_2=2{,}5,\ x_3=-1{,}5.$$

Таким образом, точки пересечения графика функции с осью абсцисс

(1;0); (2,5;0); (−1,5;0).

8) Построим график функции (Рис. 6).

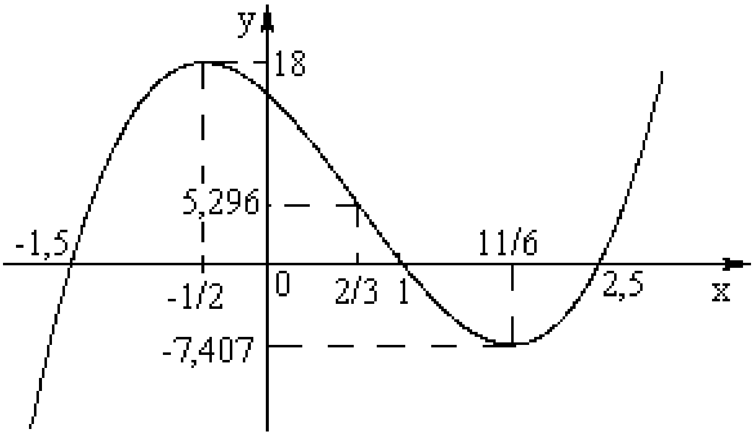

Рисунок 6

Разделим кубический многочлен на ($x - x_1$), т.е на ($x - 1$):

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 4x^3-8x^2-11x+15 \\ 4x^3-4x^2 \end{array} & \underline{\;x-1\;} \\
\hline
-\begin{array}{r} -4x^2-11x+15 \\ -4x^2+4x \end{array} & 4x^2-4x-15 \\
\hline
-\begin{array}{r} -15x+15 \\ -15x+15 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Задание7. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

а) $\int(-5x^8 - \frac{11}{x} + \sqrt[12]{x})dx = \int\left(-5x^8\right)dx + \int\left(-\frac{11}{x}\right)dx + \int \sqrt[12]{x}dx =$

$$= -5\cdot\frac{x^9}{9} - 11\,ln|x| + \frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}} + C = -\frac{5x^9}{9} - 11\,ln|x| + \frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}} + C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{5x^9}{9} - 11\,ln|x| + \frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}} + C\right)' = -\frac{5}{9}\cdot 9x^{9-1} - 11\cdot\frac{1}{x} + \left(\frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}}\right)' =$$

$$= -5x^8 - \frac{11}{x} + \frac{12}{13}\cdot\frac{13}{12}x^{\frac{13}{12}-1} = -5x^8 - \frac{11}{x} + \sqrt[12]{x}.$$

б) $\int e^{sin\,2x}\,cos\,2xdx$.

Полагаем $t = sin\,2x$. Тогда $dt = \left(sin\,2x\right)'dx$, т.е. $dt = 2\,cos\,2xdx$. Отсюда $cos\,2xdx = \frac{dt}{2}$ и, следовательно,

$$\int e^{sin\,2x}\,cos\,2xdx = \int\frac{e^t dt}{2} = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{sin\,2x} + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}e^{\sin 2x}+C\right)' = \frac{1}{2}e^{\sin 2x}(\sin 2x)' = \frac{1}{2}e^{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x = e^{\sin 2x}\cos 2x.$$

в) $\int(2+5x)\sin x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Полагаем $u = 2+5x$, $dv = \sin x dx$.

Тогда $du = (2+5x)' dx$, т.е. $du = 5dx$, и $v = \int \sin x dx$, т.е. $v = -\cos x$.

Следовательно

$$\int(2+5x)\sin x dx = -(2+5x)\cos x - \int 5(-\cos x)dx = -(2+5x)\cos x + 5\sin x + C.$$

Проверка:

$$\left(-(2+5x)\cos x + 5\sin x + C\right)' = -\left((2+5x)'\cdot\cos x + (2+5x)\cdot(\cos x)'\right) + 5\cos x =$$
$$= -5\cos x + (2+5x)\sin x + 5\cos x = (2+5x)\sin x.$$

Задание 8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x + 4$ и прямой $y = x + 6$. Сделать чертеж.

Решение: 1) Построим параболу $y = x^2 + 2x + 4$. Координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ - точки (x_0;y_0) - находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{-b}{2a};\ y_0 = ax_0{}^2 + bx_0 + c.$$

В нашем случае $x_0 = \frac{-2}{2} = -1$, $y_0 = y(-1) = 3$. Так как a=1>0, то ветви параболы направлены вверх (Рис.7).

2) Прямую $y = x + 6$ построим по двум точкам: $x = 0$, $y = 0 + 6 = 6$ и $x = -1$, $y = -1 + 6 = 5$.

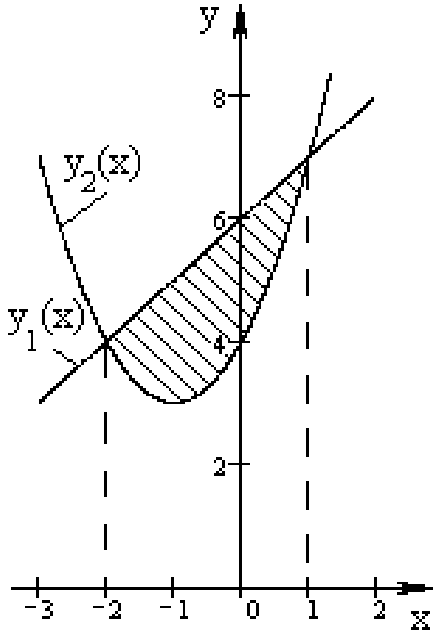

Рисунок 7

3) Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 4 \\ y = x + 6 \end{cases};$$

$$x^2 + 2x + 4 - (x+6) = 0;$$

$$x^2 + x - 2 = 0;$$

$$x_1 = -2, y_1 = 4;$$

$$x_2 = 1, y_2 = 7.$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (y_1(x) - y_2(x))dx.$$

Найдем площадь фигуры, ограниченной данной прямой и параболой:

$$S = \int_{-2}^{1} \left[(x+6) - \left(x^2 + 2x + 4\right)\right]dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = 4{,}5 \text{ кв.ед.}$$

1.4 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задание 9. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $x\ y' - y = 5$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$.

Решение: Запишем уравнение в виде

$$x\ y' = 5 + y,$$

или

$$x\ dy = (5 + y)dx.$$

Полагая, что $x \neq 0$ и $(5+y) \neq 0$, разделим левую и правую части уравнения на выражение $x\ (5+y)$, в результате получим $\dfrac{dy}{5+y} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя левую и правую части, получим

$$\ln|5+y| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Откуда следует, что

$$\ln|5+y| = \ln|Cx|,$$

или

$$5 + y = Cx.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = Cx - 5$.

«Потерянное» в процессе преобразований решение y= -5 при $x = 0$ получается из найденного общего решения при *C*=0.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию *y*(1)=0. Для этого подставим значения *x*=1 и *y*=0 в общее решение и найдем значение C=5.

Частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию *y*(1)=0 имеет вид $y = 5x - 5$.

Задание 10. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 \end{cases}. \qquad (1)$$

Решение: Продифференцируем первое уравнение системы (1) по *t*:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 4\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}.$$

Подставим вместо $\dfrac{dx_2}{dt}$ ее выражение из второго уравнения системы (1):

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 4\frac{dx_1}{dt} - \left(-2x_1 + 3x_2\right).$$

Получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 4\frac{dx_1}{dt} + 2x_1 - 3x_2 \qquad (2)$$

Выразим x_2 из первого уравнения системы (1):

$$x_2 = -\frac{dx_1}{dt} + 4x_1. \qquad (3)$$

Подставим полученное выражение (3) в уравнение (2):

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=4\frac{dx_1}{dt}+2x_1-3\left(-\frac{dx_1}{dt}+4x_1\right)$$ или

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=7\frac{dx_1}{dt}-10x_1. \qquad (4)$$

Таким образом, получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}-7\frac{dx_1}{dt}+10x_1=0. \qquad (5)$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2-7\lambda+10=0$ имеет корни

$$\lambda_1=5,\ \lambda_2=2.$$

Общее решение имеет вид:

$$x_1=C_1e^{5t}+C_2e^{2t}, \qquad (6)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Подставим найденное выражение (6) в (3):

$$\begin{aligned}x_2&=-\left(C_1e^{5t}+C_2e^{2t}\right)'+4\left(C_1e^{5t}+C_2e^{2t}\right)=\\&=-5C_1e^{5t}-2C_2e^{2t}+4C_1e^{5t}+4C_2e^{2t}=-C_1e^{5t}+2C_2e^{2t}\end{aligned} \qquad (7)$$

Решение данной системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases}x_1=C_1e^{5t}+C_2e^{2t}\\x_2=-C_1e^{5t}+2C_2e^{2t}\end{cases}$$

1.5 РЯДЫ

Задание 11. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n}$.

Решение: Общий член данного ряда с положительными членами имеет вид: $a_n=\frac{4^n n!}{n^n}$.

Тогда $a_{n+1}=\frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 4^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot 4\cdot n!\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)\cdot 4^n\cdot n!}=$$

$$= 4 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{4}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{4}{e} > 1,$$

то по признаку Даламбера ряд расходится.

Критерии оценки выполнения практического задания:

«5» (отлично): выполнены все практические задания, студент четко и без ошибок ответил на все контрольные вопросы.
«4» (хорошо): выполнены все практические задания; студент ответил на все контрольные вопросы с замечаниями.
«3» (удовлетворительно): выполнены все практичесике задания с замечаниями; студент ответил на все контрольные вопросы с замечаниями.
«2» (не зачтено): студент не выполнил или выполнил неправильно задания; студент ответил контрольные вопросы с ошибками или не ответил на контрольные вопросы.

Отчет рассматривается как критерий оценки только при выполнении студентом практической работы. Студент не допускается к защите практической работы без ее выполнения.

Таблица 4 - Оценочные материалы (оценочные средства) по дисциплине «Высшая математика»

Компетенция	Знать	Оценочные средства		Уметь	Оценочные средства		Владеть	Оценочные средства	
		текущий контроль	промежуточный контроль		текущий контроль	промежуточный контроль		текущий контроль	промежуточный контроль
УК-1	УК-1.1 Знает основные направления и методы поиска, критического анализа и синтеза информации, полученной из разных актуальных источников, применяемые в соответствии с требованиями и условиями поставленной задачи	Не предусмотрен	Вопросы к экзамену № 1-95	УК-1.2 Умеет применять в процессе решения поставленных задач методы поиска, сбора и обработки информации, полученной из разных источников, осуществляя ее критический анализ и синтез, с учетом выявленных системных связей и отношений между изучаемыми явлениями, процессами и/или объектами	Не предусмотрен	Вопросы к экзамену 1-95	УК-1.3 Владеет навыками поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода в процессе решения поставленных задач	Не предусмотрен	Вопросы к экзамену № 1-95, практические задания №а 1-10, задания к практическим занятиям.1-4.

Примечание

* берется из РПД

** сдача практических работ, защита курсового проекта, РГР и т.д.

Карта тестовых заданий

Компетенция УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

Индикатор УК-1.3. Владеет навыками поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода в процессе решения поставленных задач.

Дисциплина «Высшая математика»

Описание теста:

1. Тест состоит из 70 заданий, которые проверяют уровень освоения компетенций обучающегося. При тестировании каждому обучающемуся предлагается 30 тестовых заданий по 15 открытого и закрытого типов разных уровней сложности.
2. За правильный ответ тестового задания обучающийся получает 1 условный балл, за неправильный ответ – 0 баллов. По окончании тестирования, система автоматически определяет «заработанный итоговый балл» по тесту, согласно критериям оценки
3 Максимальная общая сумма баллов за все правильные ответы составляет – 100 баллов.
4. Тест успешно пройден, если обучающийся правильно ответил на 70% тестовых заданий (61 балл).
5. На прохождение тестирования, включая организационный момент, обучающимся отводится не более 45 минут. На каждое тестовое задание в среднем по 1,5 минуты.
6. Обучающемуся предоставляется одна попытка для прохождения компьютерного тестирования.

Кодификатором теста по дисциплине является раздел рабочей программы «4. Структура и содержание дисциплины (модуля)»

Комплект тестовых заданий

Задания закрытого типа

*Выберите **один** правильный ответ*

Простые (1 уровень)

1Определитель матрицы А равен 2. Тогда определитель транспонированной матрицы равен

А) **2**

Б) -2

В) 0,5

2 Вероятность достоверного события равна

А) **1**

Б) 0

В) -1

3 Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в некоторой точке, равен

А) **значению производной функции в этой точке**

Б) отношению значения функции к значению аргумента в этой точке

В) значению функции в этой точке

4 Производная функции f(x) определяет
А) **скорость изменения функции**
Б) область определения функции
В) область значений функции

5 Прямая описывается уравнением x=2. Тогда прямая

А) **параллельна оси OY**
Б) параллельна оси OX
В) проходит через начало координат

Средне –сложные (2 уровень)

6. Уравнение Ax+By+C=0 при C=0 определяет прямую

А) проходящую через начало координат
Б) параллельную оси OX
С) перпендикулярную оси OX

7 Производная функции y=sin(3x+1) равна

А) **3cos(3x+1)**
Б) -3cos(3x+1)
В) cos(3x+1)

8Производная функции y=ln(cosx) равна

А) **-tgx**
Б) tgx
В) ctgx

9 Мода случайной величины показывает ее значение
А) **наиболее вероятное**
Б) среднее
В) наименьшее

10 В коробке 7 синих и 3 красных карандаша. Наугад взяли один карандаш. Вероятность того, что он - синий, равна
А) **0,7**
Б) 0,3
В) 1

11 Для дифференцируемой функции f(x) достаточное условие убывания

имеет вид

А) **f'(x) < 0**
Б) f' (x) > 0
В) f' (x) = 0

12 Функция *f(x)* дифференцируема в точке *a* и имеет в ней экстремум. Тогда

А) ***f ‘ (a) = 0***
Б) *f ‘ (a) > 0*
В) *f ‘ (a) < 0*

13 Общее решение дифференциального уравнения *y’ x=y* имеет вид
А) ***y=Cx***
Б) *y=3x*
В) *y=Cx+1*

14 Прямая проходит через точки А(2,–3) и В(1,4). Ее угловой коэффициент равен
А) **-7**
Б) 7
В) 1
Г) 11

15 Производная функции y=sin (8x) равна

А) ***8cos 8x***
Б) *-8cos 8x*
В) *cos x*

16 Функция *f(x)* дважды дифференцируема в точке *a* и имеет в ней перегиб. Тогда

А) **f “ (a) = 0**

Б) f “ (a) > 0

В) f “ (a) < 0

17 Вторая производная функции y = sin2x равна
А) ***-4sin2x***
Б) *-4cos2x*
В) *4sin2x*

18 Производная функции y=xcosx равна
А) **cosx-xsinx**
Б) cosx
В) sinx

19 Задана функция y=ln(1+x). Она определена при
А) **x>-1**
Б) x=-1
В) *x>0*

20 Уравнение прямой, проходящей через точку М(2;2) параллельно прямой y=5x-1 имеет вид
А) **y=5x-8**;
Б) y=5x
В) y=-5x+8

21 Плоскость задана уравнением Ax+By+Cz+D=0. Тогда числа A, B и *C* определяют

А) **координаты нормального вектора плоскости;**
Б) отрезки, которые плоскость отсекает на осях координат OX, OY и OZ соответственно;
В) координаты точки, принадлежащей плоскости

22 Уравнение плоскости, проходящей через точку A (1,–2,3) параллельно плоскости XOY имеет вид

А) **z=3;**
Б) x=1;
В) y= –2;
Г) x–2y+3z=0

Сложные (3 уровень)

23 Уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1,0,1), B(0,1,1) и C(0,0,1) имеет вид

А) **z=1**
Б) x+y+z-1=0
В) x+z-1=0

24 Координаты нормального вектора координатной плоскости XOY

А) **{0,0,1}**
Б) {0,1,0)
В) {1,4,5}

25 Уравнение плоскости проходящей через ось Ox и точку A(1;1;1) имеет вид

А) **y-z=0**
Б) x-3y+2z-3=0
В) 2x-y+8z+13=0

Задания на установление соответствия

Установите соответствие между левым и правым столбцами.

Простые (1 уровень)

26 Установите соответствие между прямыми и их угловыми коэффициентами **(1Б,2А)**:

1	12x+6y-9=0	А) 7
2	7x-y+5=0	Б) -2
		В)2

27 Установите соответствие между функциями и их производными **(1В,2А)**:

А) $y'=-\sin x$

1 $y=\sin x$
2 $y=\cos x$

Б) $y'=\sin x$
В) $y'=\cos x$

Средне-сложные (2 уровень)

28 Установите соответствие между функциями и их производными **(1В,2А)**:

1 $y=\ln\cos x$
2 $y=\ln\sin x$

А) $y'=ctgx$
Б) $y'=tgx$
В) $y'=-tgx$

29 Установите соответствие между функциями и их первообразными **(1Б,2А)**:

1 $y=\sin x$
2 $y=\cos x$

А) $F(x)=\sin x$
Б) $F(x)=-\cos x$
В) $F(x)=\cos x$

30 Установите соответствие между дифференциальным уравнением первого порядка и его типом **(1Б, 2А)**:

1 $xy'+y\sin y=0$
2 $y'+y\sin x=x+8$

А) Линейное
Б) С разделяющимися переменными
В) Однородное

31 Установите соответствие **(1А,2В,3Б)**

1 Скалярное произведение векторов равно нулю
2 Смешанное произведение векторов равно нулю
3 Векторное произведение векторов равно нулю

А) Условие перпендикулярности векторов
Б) Условие коллинеарности векторов
В) Условие компланарности векторов

32 Установите соответствие между уравнениями плоскости и характеристиками плоскости **(1Б,2А)**:

1 $x+2y+4z=0$
2 $z-5=0$

А) Плоскость параллельна плоскости XOY
Б) Плоскость проходит через начало координат
В) Координатная плоскость OZ

33 Установите соответствие между операциями над матрицами и условиями, при которых они определены **(1А,2Б)**:

1 Умножение матрицы А на матрицу В

2 Сложение матриц А и В

А) Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй

Б) Матрицы имеют одинаковую структуру

В) Матрицы являются невырожденными

34 Установите соответствие между функцией и множеством ее значений **(1Б,2А)**:

1 y=cosx

2 *y=5sinx*

А) [-5;5]

Б) [-1;1]

В)[1;5]

Сложные (3 уровень)

35 Установите соответствие между дифференциальным уравнением и его видом **(1А,2Б)**:

1 y’’-12y’+35y=0

2 y’’-12y’-36y=sinx

А) однороднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Б) неоднороднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

В) однороднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами

Задания открытого типа

Задания на дополнение
Напишите пропущенное число или слово.

Простые (1 уровень)

36 Модуль вектора {2; -3;6} равен ___ **(7, семь, семи)**

37 Модуль вектора {0; -3;4} равен ___ **(5, пять, пяти)**

38 Задана функция y=5x . Тогда значение y' (1) равно ___ **(5, пять, пяти)**

39 Задана функция y=12x . Тогда значение y' (1) равно ___ **(12, двенадцать, двенадцати)**

40 Задана функция y=sin x . Тогда значение y' (0) равно ___ (**1, один, одному, единица, единице)**

41 Порядок дифференциального уравнения y''+ 3y'+7y=0 равен ___ **(2, два, двум)**

Средне-сложные (2 уровень)

42 Абсцисса точки пересечения прямых 2x + y - 4 = 0 и x + y + 1 = 0 равна _____ **(5, пять, пяти)**

43 Объем параллелепипеда, построенного на векторах (1; 2; 3), (2; 1; 1), (-1; 1; 0), равен ___ (**6, шесть, шести)**

44 Квадратная матрица А имеет обратную матрицу, тогда и только тогда, когда ее определитель не равен (**0, ноль, нолю, нуль, нулю)**

45 Скалярное произведение векторов (1; 2; 3), (2; 1; 1) равно ___ **(7,семь, семи)**

46 Косинус угла между прямыми 2x + y - 4 = 0 и x - 2y + 1 = 0 равен ___ (**0, ноль, нолю, нуль, нулю)**

47 Производная функции y=2+cos3x в точке x=0 равна ____ (**0, ноль, нолю, нуль, нулю)**

48 Производная функции y=12x-tg7x в точке x=0 равна ____ **(5, пять, пяти)**

49 Производная функции y=2sin3x в точке x=0 равна ___ (**6, шесть, шести)**

50 Определитель матрицы А равен 9. Тогда определитель транспонированной матрицы равен ____ (**9, девять, девяти)**

51 Определитель матрицы А равен 1. Тогда определитель обратной матрицы равен ____ (**1, один, одному, единица, единице)**

52 Векторы (x; 1; 2) и (6; 2; 4) коллинеарны при x, равном _____ (**3, три, трем)**

53 Векторы (2; x; -1) и (x; 1; 3) перпендикулярны при x, равном _____ **(1, один,одному, единица, единице)**

54 Скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно ___ (**0, ноль, нолю, нуль, нулю)**

55 Смешанное произведение трех компланарных векторов равно ___ (**0, ноль, нолю, нуль, нулю)**

56 Модуль векторного произведения двух векторов численно равен ________ параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах **(площади)**

57 Сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна ___ (**1, один, одному, единица, единице)**

58 Уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$. Если плоскость проходит через начало координат, то коэффициент D равен ___ (**0, ноль, нолю, нуль, нулю)**

59 Прямые $y=2x+1$ и $y=kx-8$ параллельны. Тогда k равен ___ **(2, два, двум)**

60 Прямые $y=2x+1$ и $y=kx-8$ перпендикулярны. Тогда k равен ___(**-0,5; -0.5)**

61 Прямые $Ax+6y+1=0$ и $3x-2y+8=0$ параллельны. Тогда коэффициент A равен ___ **(-9)**

62 Прямые $Ax+6y+1=0$ и $3x-2y+8=0$ перпендикулярны. Тогда коэффициент A равен ___ (**4, четыре, четырем)**

63 Плоскости $3x+2y+z+5=0$ и $6x+4y+Cz-3=0$ параллельны. Тогда коэффициент C равен ___ **(2, два, двум)**

64 Плоскости $3x+2y+z+5=0$ и $6x+4y+Cz-3=0$ перпендикулярны. Тогда коэффициент C равен ___ **(-26)**

65 Производная функции y= cos3x + ln(8x+1) в точке x=0 равна ___ (**8, восемь, восьми)**

66 Производная функции y=ln(2x+1)-tg3x в точке x=0 равна _____ **(-1)**

67 Производная функции y=2arctg(6x+1) в точке x=0 равна _____ (**6, шесть, шести)**

Сложные (3 уровень)

68 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми *y=4x, x=1* и отрезком [0, 1] оси *ox,* равна ___ **(2, два, двум)**

69 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми *y=2x+3, x=0, x=2* и отрезком [0, 2] оси *ox* равна ___ (**10, десять, десяти)**

70 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми *y=6x+1, x=0, x=1* и отрезком [0, 1] оси *ox,* равна ___ (**4, четыре, четырем)**

Карта учета тестовых заданий (вариант 1)

<table>
<tr><td>Компетенция</td><td colspan="4">УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.</td></tr>
<tr><td>Индикатор</td><td colspan="4">УК-1.3. Владеет навыками поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода в процессе решения поставленных задач.</td></tr>
<tr><td>Дисциплина</td><td colspan="4">Высшая математика</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Уровень освоения</td><td colspan="3">Тестовые задания</td><td rowspan="3">Итого</td></tr>
<tr><td colspan="2">Закрытого типа</td><td>Открытого типа</td></tr>
<tr><td>Альтернативный выбор</td><td>Установление соответствия/ последовательности</td><td>На дополнение</td></tr>
<tr><td>1.1.1 (20%)</td><td>5</td><td>2</td><td>7</td><td>14</td></tr>
<tr><td>1.1.2 (70%)</td><td>17</td><td>7</td><td>24</td><td>48</td></tr>
<tr><td>1.1.3 (10%)</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Итого:</td><td>25 шт.</td><td>10 шт.</td><td>35 шт.</td><td>70 шт.</td></tr>
</table>

Карта учета тестовых заданий (вариант 2)

<table>
<tr><td>Компетенция</td><td colspan="3">УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.</td></tr>
<tr><td>Индикатор</td><td colspan="3">УК-1.3. Владеет навыками поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода в процессе решения поставленных задач.</td></tr>
<tr><td>Дисциплина</td><td colspan="3">Высшая математика</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Уровень освоения</td><td colspan="3">Тестовые задания</td></tr>
<tr><td colspan="2">Закрытого типа</td><td>Открытого типа</td></tr>
<tr><td>Альтернативного выбора</td><td>Установление соответствия/Установление последовательности</td><td>На дополнение</td></tr>
<tr><td>1.1.1</td><td>1 Определитель матрицы А равен 2. Тогда определитель транспонированной матрицы равен
А) 2
Б) -2
В) 0,5

2 Вероятность достоверного события равна
А) 1
Б) 0
В) -1

3 Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в некоторой точке, равен
А) значению производной функции в этой точке
Б) отношению значения функции к значению</td><td>26 Установите соответствие между прямыми и их угловыми коэффициентами:

1 12x+6y-9=0
2 7x-y+5=0

А) 7
Б) -2
В)2

27 Установите соответствие между функциями и их производными:
1 y=sinx
2 y=cosx

А) y’=-sinx
Б) y’=sinx
В)y’=cosx</td><td>36 Модуль вектора {2; -3;6} равен ___

37 Модуль вектора {0; -3;4} равен ___

38 Задана функция y=5x . Тогда значение y’ (1) равно ___

39 Задана функция y=12x . Тогда значение y’ (1) равно ___

40 Задана функция y=sin x . Тогда значение y’ (0) равно ___

41 Порядок дифференциального уравнения y’’+ 3y’+7y=0 равен ___</td></tr>
</table>

	аргумента в этой точке В) значению функции в этой точке 4 Производная функции f(x) определяет А) скорость изменения функции Б) область определения функции В) область значений функции 5 Прямая описывается уравнением x=2. Тогда прямая А) параллельна оси OY Б) параллельна оси OX В) проходит через начало координат		
1.1.2	6 . Уравнение Ax+By+C=0 при C=0 определяет прямую А) проходящую через начало координат Б) параллельную оси OX С) перпендикулярную оси OX 7 Производная функции y=sin(3x+1) равна А) 3cos(3x+1) Б) -3cos(3x+1) В) cos(3x+1) 8 Производная функции y=ln(cosx) равна А) -tgx Б) tgx В) ctgx 9 Мода случайной величины показывает ее значение А) наиболее вероятное Б) среднее В) наименьшее 10 В коробке 7 синих и 3 красных карандаша. Наугад взяли один карандаш. Вероятность того, что он - синий, равна А) 0,7 Б) 0,3 В) 1 11 Для дифференцируемой	28 Установите соответствие между функциями и их производными: 1 y=lncosx 2 y=lnsinx А) y'=ctgx Б) y'=tgx В)y'=-tgx 29 Установите соответствие между функциями и их первообразными : 1 y=sinx 2 y=cosx А) F(x) =sinx Б) F(x)=-cosx В)F(x)=cosx 30 Установите соответствие между дифференциальным уравнением первого порядка и его типом:	42 Абсцисса точки пересечения прямых 2x + y - 4 = 0 и x + y + 1 = 0 равна _____ 43 Объем параллелепипеда, построенного на векторах (1; 2; 3), (2; 1; 1), (-1; 1; 0), равен ___ 44 Квадратная матрица А имеет обратную матрицу, тогда и только тогда, когда ее определитель не равен 45 Скалярное произведение векторов (1; 2; 3), (2; 1; 1) равно ___ 46 Косинус угла между прямыми 2x + y - 4 = 0 и x - 2y + 1 = 0 равен ___ 47 Производная функции y=2+cos3x в точке x=0 равна ____ 48 Производная функции y=12x-tg7x в точке x=0 равна _______ 49 Производная функции y=2sin3x в точке x=0 равна ___ 50 Определитель матрицы А равен 9. Тогда определитель транспонированной матрицы равен ____ 51 Определитель матрицы А равен 1. Тогда определитель обратной матрицы равен ____ 52 Векторы (x; 1; 2) и (6; 2; 4) коллинеарны при x, равном _____ 53 Векторы (2; x; -1) и (x;

	функции f(x) достаточное условие убывания имеет вид А) $f'(x) < 0$ Б) $f'(x) > 0$ В) $f'(x) = 0$ 12 Функция f(x) дифференцируема в точке а и имеет в ней экстремум. Тогда А) $f'(a) = 0$ Б) $f'(a) > 0$ В) $f'(a) < 0$ 13 Общее решение дифференциального уравнения $y'x=y$ имеет вид А) y=Cx Б) y=3x В) y=Cx+1 14 Прямая проходит через точки А(2,–3) и В(1,4). Ее угловой коэффициент равен А) -7 Б) 7 В) 1 Г) 11 15 Производная функции y=sin (8x) равна А) 8cos 8x Б) -8cos 8x В) cos x 16 Функция f(x) дважды дифференцируема в точке а и имеет в ней перегиб. Тогда А) $f''(a) = 0$ Б) $f''(a) > 0$ В) $f''(a) < 0$ 17 Вторая производная функции y = sin2x равна А) -4sin2x Б) -4cos2x В) 4sin2x 18 Производная функции y=xcosx равна А) cosx-xsinx Б) cosx В) sinx 19 Задана функция y=ln(1+x). Она определена при А) x>-1 Б) x=-1 В) x>0	1 $xy'+y\sin y=0$ 2 $y'+y\sin x=x+8$ А) Линейное Б) С разделяющимися переменными В) Однородное 31 Установите соответствие 1 Скалярное произведение векторов равно нулю 2 Смешанное произведение векторов равно нулю 3 Векторное произведение векторов равно нулю А) Условие перпендикулярности векторов Б) Условие коллинеарности векторов В)Условие компланарности векторов 32 Установите соответствие между уравнениями плоскости и характеристиками плоскости: 1 x+2y+4z=0 2 z-5=0 OZ А) Плоскость параллельна плоскости XOY Б) Плоскость проходит	1; 3) перпендикулярны при x, равном _____ 54 Скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно ___ 55 Смешанное произведение трех компланарных векторов равно ___ 56 Модуль векторного произведения двух векторов численно равен ________ параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах 57 Сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна ___ 58 Уравнение плоскости имеет вид Ax+By+Cz+D=0. Если плоскость проходит через начало координат, то коэффициент D равен ___ 59 Прямые y=2x+1 и y=kx-8 параллельны. Тогда k равен ___ 60 Прямые y=2x+1 и y=kx-8 перпендикулярны. Тогда k равен ___ 61 Прямые Ax+6y+1=0 и 3x-2y+8=0 параллельны. Тогда коэффициент А равен __ 62 Прямые Ax+6y+1=0 и 3x-2y+8=0 перпендикулярны. Тогда коэффициент А равен __ 63 Плоскости 3x+2y+z+5=0 и 6x+4y+Cz-3=0 параллельны. Тогда коэффициент С равен ___ 64 Плоскости 3x+2y+z+5=0 и 6x+4y+Cz-3=0 перпендикулярны. Тогда коэффициент С равен ___ 65 Производная функции y= cos3x + ln(8x+1) в точке x=0 равна ___ 66 Производная функции y=ln(2x+1)-tg3x в точке x=0 равна ____

	20 Уравнение прямой, проходящей через точку M(2;2) параллельно прямой y=5x-1 имеет вид А) y=5x-8; Б) y=5x В) y=-5x+8 21 Плоскость задана уравнением Ax+By+Cz+D=0. Тогда числа A, B и C определяют А) координаты нормального вектора плоскости; Б) отрезки, которые плоскость отсекает на осях координат OX, OY и OZ соответственно; В) координаты точки, принадлежащей плоскости 22 Уравнение плоскости, проходящей через точку A (1,–2,3) параллельно плоскости XOY имеет вид А) z=3; Б) x=1; В) y= –2; Г) x–2y+3z=0	через начало координат В) Координатная плоскость 33 Установите соответствие между операциями над матрицами и условиями, при которых они определены: 1 Умножение матрицы A на матрицу B 2 Сложение матриц A и B А) Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй Б) Матрицы имеют одинаковую структуру В) Матрицы являются невырожденными 34 Установите соответствие между функцией и множеством ее значений: 1 y=cosx 2 y=5sinx А) [-5;5] Б) [-1;1] В)[1;5]	
1.1.3	23 Уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1,0,1), B(0,1,1) и C(0,0,1) имеет вид А) z=1 Б) x+y+z-1=0 В) x+z-1=0 24 Координаты нормального вектора	35 Установите соответствие между дифференциальным уравнением и его видом: 1 y’’-12y’+35y=0 2 y’’-12y’-36y=sinx	67 Производная функции y=2arctg(6x+1) в точке x=0 равна _____ 68 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми y=4x, x=1 и отрезком [0, 1] оси ox, равна ___ 69 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми

	координатной плоскости XOY А) {0,0,1} Б) {0,1,0) В) {1,4,5} 25 Уравнение плоскости проходящей через ось Ох и точку А(1;1;1) имеет вид А) y-z=0 Б) x-3y+2z-3=0 В) 2x-y+8z+13=0		y=2x+3, x=0, x=2 и отрезком [0, 2] оси ох равна ___ 70 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми y=6x+1, x=0, x=1 и отрезком [0, 1] оси ох, равна ___
Итого:	25 шт.	10 шт.	35 шт.

Критерии оценивания

Критерии оценивания тестовых заданий

Критерии оценивания: правильное выполнение одного тестового задания оценивается 1 баллом, неправильное – 0 баллов.

Максимальная общая сумма баллов за все правильные ответы составляет наивысший балл – 100 баллов.

Шкала оценивания результатов компьютерного тестирования обучающихся (рекомендуемая)

Оценка	Процент верных ответов	Баллы
«удовлетворительно»	70-79%	61-75 баллов
«хорошо»	80-90%	76-90 баллов
«отлично»	91-100%	91-100 баллов

Ключи ответов

№ зад	Номер и вариант правильного ответа
1	А) 2
2	А) 1
3	А) значению производной функции в этой точке
4	А) скорость изменения функции
5	А) параллельна оси OY
6	А) проходящую через начало координат
7	А) 3cos(3x+1)
8	А) -tgx
9	А) наиболее вероятное
10	А) 0,7; 0.7
11	А) f ‘(x) < 0
12	А) *f ‘ (a) = 0*
13	А) *y=Cx*
14	А) -7
15	А) *8cos8x*
16	А) f “ (x) = 0

36	7, семь, семи
37	5, пять, пяти
38	5, пять, пяти
39	12, двенадцать, двенадцати
40	1, один, одному, единица, единице
41	2, два, двум
42	5, пять, пяти
43	6, шесть, шести
44	0, ноль, нолю, нуль, нулю
45	7, семь, семи
46	0, ноль, нолю, нуль, нулю
47	0, ноль, нолю, нуль, нулю
48	5, пять, пяти
49	6, шесть, шести
50	9, девать, девяти
51	1, один, одному, единица, единице
52	3, три, трем

17	А) *-4sin 2x*	**53**	1, один, одному, единица, единице
18	А) cosx-xsinx	**54**	0, ноль, нолю, нуль, нулю
19	А) x>-1	**55**	0, ноль, нолю, нуль, нулю
20	А) y=5x-8;	**56**	площади
21	А) координаты нормального вектора плоскости	**57**	1, один, одному, единица, единице
22	А) *z=3*	**58**	0, ноль, нолю, нуль, нулю
23	А)*z=1*	**59**	2, два, двум
24	А){0,0,1}	**60**	-0,5; -0.5
25	А) *y-z=0*	**61**	-9
26	1Б,2А	**62**	4, четыре, четырем
27	1В,2А	**63**	2, два, двум
28	1В,2А	**64**	-26
29	1Б,2А	**65**	8, восемь, восьми
30	1Б,2А	**66**	-1
31	1А,2В,3Б	**67**	6, шесть, шести
32	1Б,2А	**68**	2, два, двум
33	1А,2Б	**69**	10, десять, десяти
34	1Б,2А	**70**	4, четыре, четырем
35	1А,2Б		

Демоверсия

Комплект тестовых заданий

Компетенция УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

Индикатор УК-1.3. Владеет навыками поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода в процессе решения поставленных задач.

Дисциплина Высшая математика

Задания закрытого типа

Задания альтернативного выбора

*Выберите **один** правильный ответ*

Простые (1 уровень)

1Определитель матрицы А равен 2. Тогда определитель транспонированной матрицы равен

А) **2**

Б) -2

В) 0,5

2 Вероятность достоверного события равна

А) **1**

Б) 0

В) -1

Средне –сложные (2 уровень)

3. Уравнение Ax+By+C=0 при C=0 определяет прямую

А) проходящую через начало координат
Б) параллельную оси OX
С) перпендикулярную оси OX

4 Производная функции y=sin(3x+1) равна

А) **3cos(3x+1)**
Б) -3cos(3x+1)
В) cos(3x+1)

5 Производная функции y=ln(cosx) равна

А) **-tgx**
Б) tgx
В) ctgx

6 Мода случайной величины показывает ее значение
А) **наиболее вероятное**
Б) среднее
В) наименьшее

7 В коробке 7 синих и 3 красных карандаша. Наугад взяли один карандаш. Вероятность того, что он - синий, равна
А) **0,7**
Б) 0,3
В) 1

8 Для дифференцируемой функции f(x) достаточное условие убывания

имеет вид

А) **f'(x) < 0**
Б) f' (x) > 0
В) f' (x) = 0

9 Функция *f(x)* дифференцируема в точке *a* и имеет в ней экстремум. Тогда

А) ***f ' (a) = 0***
Б) *f ' (a) > 0*
В) *f ' (a) < 0*

Сложные (3 уровень)

10 Уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1,0,1), B(0,1,1) и C(0,0,1) имеет вид

А) **z=1**
Б) x+y+z-1=0
В) x+z-1=0

Задания на установление соответствия

Установите соответствие между левым и правым столбцами.

Простые (1 уровень)

11 Установите соответствие между прямыми и их угловыми коэффициентами **(1Б,2А)**:

3 12x+6y-9=0	А) 7
4 7x-y+5=0	Б) -2
	В)2

Средне-сложные (2 уровень)

12 Установите соответствие между функциями и их производными **(1В,2А)**:

1 y=*lncosx*	А) *y'=ctgx*
2 *y=lnsinx*	Б) *y'=tgx*
	В)*y'=-tgx*

13 Установите соответствие между функциями и их первообразными **(1Б,2А)**:

	А) *F(x) =sinx*
1 y=*sinx*	Б) *F(x)=-cosx*
2 *y=cosx*	В)*F(x)=cosx*

14 Установите соответствие между дифференциальным уравнением первого порядка и его типом **(1Б, 2А)**:

1 *xy'+ysiny=0*	А) Линейное
2 *y'+ysin x=x+8*	Б) С разделяющимися переменными
	В) Однородное

Сложные (3 уровень)

15 Установите соответствие между дифференциальным уравнением и его видом **(1А,2Б)**:

1 y''-12y'+35y=0

2 y''-12y'-36y=sinx

А) однороднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Б) неоднороднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

В) однороднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами

Задания открытого типа

Задания на дополнение

Напишите пропущенное число или слово.

Простые (1 уровень)

16 Модуль вектора {2; -3;6} равен ___ **(7, семь, семи)**

17 одуль вектора {0; -3;4} равен ___ **(5, пять, пяти)**

18 Задана функция y=5x . Тогда значение y’ (1) равно ___ **(5, пять, пяти)**

Средне-сложные (2 уровень)

19 Абсцисса точки пересечения прямых 2x + y - 4 = 0 и x + y + 1 = 0 равна _____ **(5, пять, пяти)**

20 Объем параллелепипеда, построенного на векторах (1; 2; 3), (2; 1; 1), (-1; 1; 0), равен ___ **(6, шесть, шести)**

21 Квадратная матрица А имеет обратную матрицу, тогда и только тогда, когда ее определитель не равен **(0, ноль, нолю, нуль, нулю)**

22 Скалярное произведение векторов (1; 2; 3), (2; 1; 1) равно ___ **(7,семь, семи)**

23 Косинус угла между прямыми 2x + y - 4 = 0 и x - 2y + 1 = 0 равен ___ **(0, ноль, нолю, нуль, нулю)**

24 Производная функции y=2+cos3x в точке x=0 равна ____ **(0, ноль, нолю, нуль, нулю)**

25 Производная функции y=12x-tg7x в точке x=0 равна ____ **(5, пять, пяти)**

26 Производная функции y=2sin3x в точке x=0 равна ___ **(6, шесть, шести)**

27 Определитель матрицы А равен 9. Тогда определитель транспонированной матрицы равен ____ **(9, девять, девяти)**

28 Определитель матрицы А равен 1. Тогда определитель обратной матрицы равен ____ **(1, один, одному, единица, единице)**

29 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми *y=4x, x=1* и отрезком [0, 1] оси *ox,* равна ___ **(2, два, двум)**

Сложные (3 уровень)

30 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми *y=2x+3, x=0, x=2* и отрезком [0, 2] оси *ox* равна ___ (**10, десять, десяти)**

Ключи ответов

№ тестовых заданий	**Номер и вариант правильного ответа**
1	А) 2
2	А) 1
3	А) проходящую через начало координат
4	А) 3cos(3x+1)
5	А) -tgx
6	А) наиболее вероятное
7	А) 0,7
8	А) f'(x) < 0
9	А) f ' (a) = 0
10	А) z=1
11	1Б,2А
12	1В,2А
13	1Б,2А
14	1Б, 2А
15	1А,2Б

16	7, семь, семи
17	5, пять, пяти
18	5, пять, пяти
19	5, пять, пяти
20	6, шесть, шести
21	0, ноль, нолю, нуль, нулю
22	7,семь, семи
23	0, ноль, нолю, нуль, нулю
24	0, ноль, нолю, нуль, нулю
25	5, пять, пяти
26	6, шесть, шести
27	9, девять, девяти
28	1, один, одному, единица, единице
29	2, два, двум
30	10, десять, десяти